

C^* -algebry
Lista 1

Zad 1. Pokazać, że dla dowolnego homomorfizmu algebr $\Phi : A \rightarrow B$ jego jądro $\ker \Phi := \{a \in A : \Phi(a) = 0\}$ jest ideałem w algebrze A .

Zad 2. Uzasadnić, że każdy niezerowy homomorfizm określony na algebrze prostej jest automatycznie injektywny.

Zad 3. Rozważmy algebrę macierzy $M_n(\mathbb{F})$. Dla każdej pary liczb $i, j = 1, \dots, n$ oznaczmy przez E_{ij} macierz z 1 w i -tym wierszu i j -tej kolumnie oraz zerami wszędzie indziej. Sprawdzić, że

$$E_{ik}E_{lj} = \delta_{k,l}E_{ij} = \begin{cases} E_{ij}, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}, \quad i, j, k, l = 1, \dots, n,$$

oraz dla dowolnej macierzy $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{F})$ mamy $E_{ii}AE_{jj} = a_{ij}E_{ij}$. Wykorzystując te fakty udowodnić, że algebra $M_n(\mathbb{F})$ jest prosta.

Zad 4. Rodzinę niezerowych elementów $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^n$ w algebrze B nazywamy *jednostkami macierzowymi*, jeżeli zachodzą relacje

$$e_{ik}e_{lj} = \delta_{k,l}e_{ij} \quad i, j, k, l = 1, \dots, n.$$

Pokazać, że podalgebra $A \subseteq B$ generowana przez jednostki macierzowe $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^n$ składa się z elementów postaci $a = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}e_{ij}$, gdzie $a_{ij} \in \mathbb{F}$, $i, j = 1, \dots, n$, i mamy naturalny izomorfizm algebr

$$A \cong M_n(\mathbb{F}).$$

W szczególności, A jest prostą algebrą z jedyneką.

Zad 5. Sprawdzić, że podzbiór $I \subseteq M_n(\mathbb{F})$ macierzy o identycznych wierszach jest ideałem prawosrotnym w $M_n(\mathbb{F})$, ale nie jest ideałem (dwustronnym). Zauważyć, że I jest podalgebrą $M_n(\mathbb{F})$ z jedyneką inną, niż jedyneką w $M_n(\mathbb{F})$.

Zad 6. Sprawdzić, że dowolnego homomorfizmu algebr $\Phi : A \rightarrow B$ wzór $[\Phi](a + \ker \Phi) = \Phi(a)$ definiuje injektywny homomorfizm $[\Phi] : A/\ker \Phi \rightarrow B$.

Zad 7. Przeformułować zadania 1-4 na ich odpowiedniki w kategorii algebr Banacha i homomorfizmów ciągłych (ograniczonych).

Zad 8. Pokazać, że jeżeli M jest podprzestrzenią przestrzeni unormowanej X , to wzór

$$\|x + M\| := \inf_{m \in M} \|x - m\|, \quad x \in X \quad (1)$$

definiuje normę na przestrzeni ilorazowej X/M wtedy i tylko wtedy gdy M jest domknięta w X . Zauważyć, że wtedy odwzorowanie ilorazowe $q : X \rightarrow X/M$ staje się *kontraktywnym* operatorem liniowym, tzn. $\|q\| \leq 1$.

Zad 9. Pokazać, że dla dowolnej domkniętej podprzestrzeni przestrzeni Banacha X przestrzeń ilorazowa X/M z normą ilorazową (1) jest przestrzenią Banacha.

Zad 10. Uzasadnić, że dla dowolnego domkniętego ideału I algebry Banacha A mamy poprawnie określoną ilorazową algebrę Banacha A/I , gdzie $q : A \rightarrow A/I$ jest kontraktywnym homomorfizmem

Zad 11. Pokazać, że dowolny ograniczony homomorfizm $\Phi : A \rightarrow B$ algebr Banacha faktoryzuje się z zachowaniem normy do injektywnego homomorfizmu $[\Phi] : A/\ker \Phi \rightarrow B$ na algebrze ilorazowej $A/\ker \Phi$, tzn. mamy $\|\Phi\| = \|[\Phi]\|$.

Zad 12. Pokazać, że obraz izometrii określonej na przestrzeni zupełnej jest domknięty.